Sulla stabilità di un punto fisso per funzioni di n variabili complesse. Problema del Centro di Schröder-Siegel

Carletti, Timoteo

Published in:
Bolletino UMI

Publication date:
2005

Document Version
Première version, également connu sous le nom de pré-print

Sunto. – *Viene considerato il problema della stabilità di un punto fisso per un germe di diffeomorfismo di più variabili complesse cercando un coniugio con la sua parte lineare: Problema del centro di Schröder–Siegel.*

Dopo aver formulato il problema e ricordato i principali risultati nel caso di diffeomorfismi olomorfi, mostriamo come estendere il problema ad alcune situazioni non olomorfe, in particolare ci interesseremo al caso di germi Gevrey. Concluderemo con un'applicazione rivolta a mostrare la stabilità effettiva di un punto fisso.

Metteremo in evidenza come un'analisi accurata del problema permetta di ottenere con i metodi diretti, alcuni risultati ottimali ottenibili con le tecniche di rinormalizzazione geometrica "à la Yoccoz".

We consider the problem of the stability of a fixed point of a germ of diffeomorphims of several complex variables, by conjugating the system with its linear part: the Schröder–Siegel centre problem.

We present the problem and some of the main results for the analytic category. Then we show how to extend the problem to some non–analytic cases, in particular we will be interested in Gevrey germs. We will end with an application proving effective stability for a fixed point.

We will point out that an accurate analysis of the problem allows us to obtain with direct methods, some optimal results obtained by using the geometrical renormalization "à la Yoccoz".

Sulla stabilità di un punto fisso per funzioni di n variabili complesse. Problema del Centro di Schröder–Siegel

Timoteo Carletti
Scuola Normale Superiore
piazza dei Cavalieri 7, 56126 Pisa, Italia
t.carletti@sns.it

December 2, 2003

1. – Introduzione

Un sistema dinamico è l'azione di un gruppo o semi gruppo su uno spazio topologico. Sistemi dinamici *continui* sono azioni di $\mathbb{R}$, originati, per esempio, da equazioni differenziali; sistemi dinamici *discreti* sono azioni di $\mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{N}$. Dato uno spazio topologico X e una funzione continua suriettiva $f : X \to X$, si può considerare il semi gruppo (rispettivamente il gruppo) delle iterate di f: $(f^{\circ n})_{n\in\mathbb{N}}$ (rispettivamente $(f^{\circ n})_{n\in\mathbb{Z}}$ se f è un omeomorfismo).

L'idea è che X, descriva lo spazio degli stati del sistema in studio, mentre f la sua evoluzione temporale. L'evoluzione di $x_0 \in X$ è data dalla sua *orbita*: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = f(x_{n-1})$ per $n \geq 1$ (oppure $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $x_{-(n+1)} = f^{\circ(-1)}(x_n)$ per $n \geq 0$, se f è invertibile).

Un primo obiettivo è determinare i *punti fissi* e i *punti periodici* (punti fissi per iterate della funzione f) e quindi studiare la *dinamica locale* in un intorno di questi punti [1].

2. – Il Problema del Centro olomorfo di Schröder–Siegel

La formulazione del problema può essere fatta risalire a Schröder (1871) [7], il quale si interessò allo studio della convergenza del metodo di Newton per determinare radici di polinomi.

Siano $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, $(P,Q) = 1$ e sia:

$$R(z) = \begin{cases} P(z)/Q(z) & \text{se } Q(z) \neq 0 \\ \infty & \text{se } Q(z) = 0 \\ \lim_{z\to\infty} P(z)/Q(z) & \text{se } z = \infty \end{cases},$$

[1] Notiamo che anche nel caso "più semplice" in cui X abbia una struttura complessa conservata da f, cioè f si olomorfa, e la dimensione di X su $\mathbb{C}$ sia 1, il problema non è completamente risolto.

il problema si riduce a studiare $z_k = R^{\circ k}(z_0)$, dato $z_0 \in \mathbb{C}$.

Possiamo supporre che la radice ricercata sia l'origine e poiché ci interessiamo al comportamento locale, possiamo espandere R in serie di Taylor all'origine e quindi considerare il seguente problema:

> Dato un germe di diffeomorfismo olomorfo all'origine, f, studiare: $z_k = f^{\circ k}(z_0)$ per $z_0 \in \mathbb{C}$.

Il problema può essere generalizzato al caso multidimensionale considerando un germe $F \in \mathit{Diff}^{\omega}(\mathbb{C}^n, 0)$ tale che $dF_0 = A \in GL(n, \mathbb{C})$ e studiare il sistema: $z_0 \in \mathbb{C}^n$, $z_k = F^{\circ k}(z_0)$.

Diremo che il punto fisso è *stabile* se per ogni δ esiste un intorno dell'origine U_0 su cui $F^{\circ k}$ sia definito e $|F^{\circ k}(U_0)| < \delta$ per ogni k .

L'idea fondamentale introdotta da Schröder per studiare i precedenti problemi è stata quella di *coniugare la dinamica del sistema dato ad un sistema "più semplice", determinato da un germe di diffeomorfismo olomorfo* G, cioè determinare una trasformazione di coordinare locale, invertible e olomorfa data da $H \in \mathit{Diff}^{\omega}(\mathbb{C}^n, 0)$ tale che:

$$F \circ H(z) = H \circ G(z)\,, \tag{1}$$

per ogni z sufficientemente vicino all'origine. Poiché $dF_0 = A$ è invariante per coniugio, il sistema "più semplice" risulterà $R_A : z \mapsto R_A(z) = Az$.

Siamo quindi in grado di formulare il:

> *Problema del Centro olomorfo di Schröder–Siegel.* Dato $F \in \mathit{Diff}^{\omega}(\mathbb{C}^n, 0)$, $dF_0 = A \in GL(n, \mathbb{C})$ determinare $H \in \mathit{Diff}^{\omega}(\mathbb{C}^n, 0)$, con $dH_0 = \mathbb{I}$ (per ottenere unicità dell'eventuale coniugio), tale che localmente si abbia $F \circ H(z) = H \circ R_A(z)$. In tal caso si parlerà di *linearizzabilità* di F, H sarà detta *linearizzante*.

Osserviamo che nel caso $n = 1$ il Teorema di uniformizzazione di Riemann e il Lemma di Schwarz assicurano l'equivalenza fra stabilità e risolubilità del Problema del Centro Olomorfo [2].

2.1. – *Caso Formale.* – Consideriamo, come primo passo, il problema del centro nel caso *formale*. Assumiamo $n = 1$ per semplificare la scrittura di alcune espressioni. Sia quindi $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\hat{f} \in z\mathbb{C}[[z]]$ una serie formale a coefficienti complessi della forma $\hat{f} = \lambda z + \sum_l f_l z^l$. Cerchiamo un'altra serie formale $\hat{h} = z + \sum_l h_l z^l \in z\mathbb{C}[[z]]$ tale che formalmente sia verificata l'ugualianza:

$$\hat{f} \circ \hat{h} = \hat{h} \circ R_{\lambda}\,,$$

dove $R_{\lambda}(z) = \lambda z$. Ugualiando le potenze di z in entrambi i membri dell'equazione otteniamo:

$$(\lambda^2 - \lambda)h_2 = f_2 \quad \text{e} \quad (\lambda^l - \lambda)h_l = \mathcal{P}_l(\lambda, f_2, \dots, f_l, h_2, \dots, h_{l-1}) \quad \forall l \geq 3\,, \tag{2}$$

dove $\mathcal{P}_l$ è un'espressione polinomiale nelle variabili. Osserviamo che $\mathcal{P}_l$ non dipende da h_m per $m \geq l$, quindi assumendo $\lambda^l - \lambda \neq 0$ per ogni $l \in \mathbb{Z}^*$, è possibile risolvere il sistema infinito di equazioni per ricorrenza.

Abbiamo quindi ottenuto che *genericamente* [2] il problema del centro formale è risolubile se e solo se λ non è una radice dell'unità.

2.2. – *Problema del centro olomorfo in dimensione uno.* – Utilizzando il metodo classico delle *serie maggioranti* è possible ottenere dalla soluzione formale, informazioni sulla soluzione nel caso olormofo. Infatti se dimostriamo che la soluzione serie formale è convergente in un certo intorno dell'origine, allora avremmo trovato una soluzione del problema del centro olomorfo espressa tramite la sua serie di Taylor, data l'unicità dello sviluppo di Taylor avremmo determinato la soluzione del problema del centro olomorfo.

Vediamo adesso quale è il meccanismo che potrebbe impedire la convergenza della soluzione serie formale. Assumendo che λ non sia una radice dell'unità (necessario per avere una soluzione formale) ed abbia modulo unitario, è un risultato classico dovuto a Dirichlet che $\inf_{m\in\mathbb{Z}^*}|\lambda^m-1|=0$; quindi ad ogni passo della procedura iterativa per determinare h_l, dividiamo per delle quantità che diventano sempre più piccole: la velocità con cui tendono a zero e il loro accumularsi in prodotti possono impedire la convergenza della soluzione formale. È questo un classico problema con *piccoli divisori*.

Se $|\lambda|\neq 1$, allora la soluzione formale è ben definita e inoltre Poincaré ha mostrato che esiste una costante positiva c tale che: $|\lambda^n-1|\geq c$ per ogni $n\geq 1$. Dunque i piccoli divisori sono uniformemente controllati e questo permette di dimostrare la convergenza della soluzione serie formale. Il Problema del Centro olomorfo di Schröder–Siegel ha soluzione.

Il caso $|\lambda|=1$ si suddivide in due sottocasi: λ è una radice q–primitiva dell'unità, oppure λ non è una radice dell'unità. Nel primo caso f è analiticamente linearizzable se e solo se f è di ordine finito, più precisamente $f^{\circ q}(z)\equiv z$. Nel restante caso poniamo $\lambda=e^{2\pi i\omega}$, $\omega\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; la soluzione serie formale è ben definita ma la sua eventuale convergenza dipende, grazie al precedente risultato di Dirichlet, fortemente dalle proprietà aritmetiche del numero irrazionale ω: "velocità di approssimazione di ω con razionali".

La Teoria analitica dei Numeri [6] ci offre *la frazione continua* come fondamentale strumento per studiare il grado di approssimazione di irrazionali con razionali. Ad ogni irrazionale x tramite l'algoritmo Frazione continua di Gauss, associamo un successione di razionali $(p_k/q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, detti *convergenti*, che godono delle seguenti proprietà:

1. (Migliore approssimazione) Per ogni $p/q\in\mathbb{Q}$, $q\leq q_k$, $p/q\neq p_k/q_k$, allora $|p_k/q_k-x|<|p/q-x|$;

2. (Ottimalità) Dato $p/q\in\mathbb{Q}$ tale che $|p/q-x|\leq(2q^2)^{-1}$, allora esiste $\bar{k}\geq 0$ tale che $p/q=p_{\bar{k}}/q_{\bar{k}}$;

[2] Può infatti accadere che per un certo $l\in\mathbb{Z}^*$ si abbia $\lambda^l-\lambda=0$ e contemporaneamente $\mathcal{P}_l\equiv 0$, non determinando così nessuna ostruzione alla risolubilità del problema. Questa situazione è ottenibile imponendo delle condizioni sui coefficienti di $\hat{f}$ equivalenti alla richiesta che $\hat{f}$ sia di ordine finito, ovvero se λ è una radice q–esima dell'unità allora $\hat{f}^{\circ q}(z)\equiv z$.

3. Per ogni $k \geq 0$ si ha:

$$\frac{1}{2q_k q_{k+1}} \leq \left| \frac{p_k}{q_k} - x \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Osserviamo quindi che "la velocità di approssimazione" di ω con razionali è legata alla velocità di crescita dei q_k.

Siamo adesso in grado di formulare i primi risultati positivi e negativi relativi al Problema del Centro Olomorfo. Se ω "è ben approssimato da razionali", nel senso che: $\lim_k \frac{\log q_{k+1}}{q_k} = +\infty$ allora esiste un germe olomorfo $f(z) = e^{2\pi i\omega}z + \cdots$, che non sia analiticamente linearizzabile, e quindi l'origine non sia stabile (Cremer 1928).

Se invece il grado di approssimazione di ω con razionali è al più polinomiale: $q_{k+1} = \mathcal{O}(q_k^{\tau+1})$ per un qualche $\tau > 0$, allora ogni germe olomorfo f, che fissi l'origine e con $f'(0) = e^{2\pi i\omega}$, è analiticamente linearizzabile e l'origine è stabile (Siegel 1942).

Remark **1** *Osserviamo che ogni risultato negativo, come il risultato di Cremer, deve essere formulato come esistenza di un controesempio e non può essere valido per tutti i germi. Infatti possiamo prendere una qualsiasi rotazione $R_{e^{2\pi i\theta}}(z) = e^{2\pi i\theta}z$ e coniugarla con qualsiasi un diffeomorfismo analitico, $\phi(z)$, che fissi l'origine, ottenendo un germe olomorfo $g(z) = \phi^{-1} \circ R_{e^{2\pi i\theta}} \circ \phi(z)$, con $g(0) = 0$ e $g'(0) = e^{2\pi i\theta}$, che risulta ovviamente analiticamente linearizzabile quale che sia θ.*

Gli irrazionali che verificano la condizione di crescita introdotta da Siegel sono chiamati Diofantei *e si può dimostrare che sono di misura piena.*

Nel lavoro del 1971 Bruno [1] migliora il risultato di Siegel introducendo una condizione sufficiente per risolvere il Problema del Centro olomorfo più debole [3], l'irrazionale ω deve verificare: $B(\omega) = \sum_k \log q_{k+1}/q_k < +\infty$. Tale condizione è chiamata in letteratura *condizione di Bruno* e gli irrazionali che la soddisfano sono detti *numeri di Bruno.* Bruno dimostra inoltre che esistono due costanti universali tali che la soluzione serie formale converge in un disco di raggio $\rho(\omega)$, dove $\rho(\omega) \geq C_1 e^{-C_2 B(\omega)}$.

Nella dimostrazione di Bruno si trovano delle stime per le costanti C_1 e C_2; poiché il raggio di convergenza dipende dalla costante C_2 tramite un esponenziale, è importante ottenere la migliore stima possibile per C_2.

Tutti i risultati presentati fin quì sono stati ottenuti con il metodo diretto delle serie maggioranti. Nel 1988 Yoccoz [8] utilizzando una costruzione geometrica, detta *rinormalizzazione geometrica*, dimostra l'ottimalità della condizione di Bruno: se l'irrazione ω non è un numero di Bruno allora esiste un germe di diffeomorfismo analitico $f(z) = e^{2\pi i\omega}z + \ldots$, che non sia analiticamente linearizzabile. Inoltre è possibile prendere il valore $C_2 = 1$.

Sorgono quindi naturalmente le seguenti domande:

1. Trattare il caso $n \geq 2$, poiché il metodo di Yoccoz è proprio del caso $n = 1$;

[3] Che la condizione di Bruno sia più debole della condizione usata da Siegel, segue dalle proprietà di crescita dei convergenti dei Diofantei e dalle proprietà di convergenza delle serie $\sum_k \log q_k/q_k$ e $\sum_k 1/q_k^\epsilon$, per ogni $\epsilon > 0$.

2. Ottenere $C_2 = 1$ con i metodi diretti (vedi [8] osservazione 2.7 pag. 21);

3. Considerare il caso non analitico.

Riguardo alla domanda 2), una stima accurata dell'accumulazione dei piccoli divisori nel caso $n = 1$, ci ha permesso [5] di ottenere il valore $C_2 = 1$ con i metodi diretti.

Consideriamo quindi il caso multidimensionale $n \geq 2$.

2.3. – *Problema del centro olomorfo in dimensione maggiore di uno.* – La classificazione dei germi analiticamente linearizzabili nel caso di dimensione più grande di uno è molto più ricca e tuttora incompleta anche nel caso analitico. Ricordiamo brevemente alcuni fra i risultati più importanti.

Sia quindi $F \in \mathit{Diff}^{\omega}(\mathbb{C}^n, 0)$ assumiamo che il differenziale di F all'origine sia in forma diagonale [4]: $dF_0 = \mathit{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$. Diremo che dF_0 è *risonante* se esistono $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ tali che:

$$k_1 + \cdots + k_n \geq 2 \quad \text{e} \quad \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_1^{k_1} - \lambda_j = 0\,.$$

È facile convincersi che la condizione di *non risonanza* è condizione necessaria e sufficiente per risolvere genericamente il problema n dimensionale formale. Osserviamo che nel caso $n = 1$ questa condizione si rilegge come λ non è radice dell'unità.

Diremo che dF_0 appartiene al *dominio di Poincaré* se: $\sup_i |\lambda_i| < 1$ oppure $\inf_i |\lambda_i| > 1$. Il complementare del dominio di Poincaré è chiamato *dominio di Siegel.*

Il primo risultato che vogliamo menzionare è dovuto a Poincaré (1893): ogni germe di diffeomorfismo analitico di n variabili complesse il cui differenziale all'origine sia non risonante e appartenga al dominio di Poincaré, è analiticamente coniugato alla sua parte lineare.

Con un salto di quasi un secolo, tralasciando molti risultati intermedi, vogliamo ricordare il risultato di Bruno (1971): ogni germe di diffeomorfismo analitico di n variabili complesse il cui differenziale all'origine sia diagonale, non risonante, con tutti gli autovalori di modulo unitario, ma non radici dell'unità, e che verifichi una certa condizione aritmetica [1, 4] (detta *condizione di Bruno multidimensionale*) è analiticamente coniugato alla sua parte lineare.

In linea con i risultati classici quì esposti abbiamo utilizzato i *metodi diretti* delle *serie maggioranti*, questi metodi hanno la caratteristica di poter trattare il problema in questione indipendentemente dalla dimensione, abbiamo così potuto ottenere [4] condizioni *sufficienti* per risolvere il problema del centro olomorfo per $n \geq 1$. Rispondendo così parzialmente alla domanda 1).

Passiamo quindi a considerare la domanda 3), cioè lo studio dei casi non analitici.

[4] Rimandiamo il lettore interessato all'Appendice 1 di [8] per una discussione approfondita del ruolo di questa ipotesi e per un esempio di germe di diffeomorfismo olomorfo non analiticamente linearizzabile il cui differenziale non sia invertibile.

3. – Il Problema del Centro non analitico di Schröder–Siegel

Per lo studio dei casi non analitici, consideriamo il seguente diagramma, formulato per semplicità nel caso $n = 1$:

$$\begin{array}{ccc} z\mathbb{C}[[z]]\,,\text{(formale)} & \longleftrightarrow & z\mathbb{C}\{z\}\,,\text{(analitico)} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \lambda = e^{2\pi i\omega}\,,\omega\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} & \longleftrightarrow & \lambda = e^{2\pi i\omega}\,,\omega\in\mathcal{B} \end{array}$$

In corrispondenza della freccia superiore abbiamo "molte" algebre di serie formali *ultradifferenziabili* [5], che "interpolano" dal caso formale al caso dei germi analitici (identificato con l'anello delle serie convergenti in un intorno dell'origine). Possiamo pensare queste serie formali come sviluppi asintotici in $z = 0$, di funzioni la cui regolarità sia "compresa fra $\mathcal{C}^\infty$ e analitico".

Alla freccia inferiore vorremmo associare condizioni aritmetiche sulla parte lineare del germe, sufficienti a risolvere il problema del centro nell'algebra ultradifferenziabile in esame. Sapendo che ad un'estremità, in corrispondenza dell'algebra delle serie formali, abbiamo la condizione di non risonanza (ovvero non essere una radice dell'unità nel caso $n = 1$), mentre all'altra estremità, in corrispondenza del caso analitico, abbiamo la condizione di Bruno.

Per fissare le idee consideriamo l'anello delle serie *Gevrey–s*, $s > 0$, i cui elementi sono serie formali $f = e^{2\pi i\omega}z + \sum f_n z^n$, per cui esistono $A, B > 0$ tali che $|f_n| \leq AB^{sn}(n!)^s$ per ogni $n \geq 1$. Si può dimostrare che questa è un'algebra ultradifferenziabile che indicheremo con $\mathcal{A}_s$, è quindi possibile formulare il:

> *Problema del Centro in Classe Gevrey–s*
>
> Dati due reali non nulli, $s_2 \geq s_1 \geq 0$, consideriamo le rispettive algebre Gevrey $\mathcal{A}_{s_1} \subset \mathcal{A}_{s_2}$. Sia $f = e^{2\pi i\omega}z + \cdots \in \mathcal{A}_{s_1}$, dove $\omega \in \mathbb{R}$, diremo che f è *linearizzabile* in $\mathcal{A}_{s_2}$ se esiste $h = z + \cdots \in \mathcal{A}_{s_2}$ tale che formalmente si abbia:
> $$f \circ h = h \circ R_\lambda\,.$$

Osserviamo che rispetto al caso olmorfo, possiamo formulare un'ulteriore domanda:

> *Problema della regolarità per la linearizzante*
>
> Fissata la regolarità di f, cioè s_1, quale è la regolarità per la linearizzante h?

La risposta a queste due domande è contenuta nel lavoro [5] per il caso $n = 1$, mentre in [4] è stato considerato il caso $n \geq 2$. Il risultato, in qualche modo sorprendente, è che la condizione di Bruno è ancora *sufficiente* affinchè la linearizzante appartenga alla stessa classe Gevrey–s del germe dato. Se permettiamo alla linearizzante di essere "meno regolare" ($s_2 > s_1$) del germe dato, allora determiniamo

[5] Cioè algebre, per somma e prodotto di Cauchy di serie formali, chiuse rispetto alla composizione formale e alla derivazione formale.

nuove condizioni sufficienti; queste condizioni sono del tipo condizione di Bruno ma più deboli. Per completezza formuliamo il risultato nel caso $n = 1$, rimandando il lettore ai lavori originali per ulteriori dettagli e approfondimenti.

THEOREM **1** *Siano $s_2 \geq s_1 \geq 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$, consideriamo $f = e^{2\pi i\omega} z + \cdots \in \mathcal{A}_{s_1}$.*

1. *Se ω è un numero di Bruno, allora la linearizzante formale appartiene anch'essa all'algebra $\mathcal{A}_{s_1}$;*

2. *(Linearizzabilità Gevrey di germi olomorfi) Se $s_1 = 0$ e ω verifica la seguente condizione $\mathcal{B}_{s_2}$:*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{l=0}^{\kappa(n)} \frac{\log q_{l+1}}{q_l} - s_2 \log n \right) < \infty\,, \tag{3}$$

   dove $\kappa(n)$ è definita da $q_{\kappa(n)} \leq n < q_{\kappa(n)+1}$. Allora la linearizzante appartiene all'algebra $\mathcal{A}_{s_2}$;

3. *Se $s_2 > s_1 > 0$ e ω verifica la condizione $\mathcal{B}_{s_2-s_1}$ Allora la linearizzante appartiene all'algebra $\mathcal{A}_{s_2}$.*

REMARK **2** *La condizione $\mathcal{B}_s$ da noi introdotta è più debole della condizione di Bruno che si ottiene come caso particolare quando $s = 0$.*

Il risultato è valido per algebre ultradifferenziabili di serie formali più generali di quelle Gevrey quì considerate: la condizione di Bruno risulta sempre sufficiente [5, 4] per linearizzare nell'algebra del germe dato, altrimenti nuove condizioni sufficienti vengono introdotte.

Il risultato è valido nel caso multidimensionale, introducendo l'analogo n–dimensionale della condizione Bruno–s.

4. – Un'applicazione: stabilità effettiva per un germe olomorfo

Per concludere vogliamo dare un'applicazione del risultato sopra esposto nel caso di linearizzabilità Gevrey–s di un germe olomorfo; invitiamo il lettore interessato a consultare [3].

È possibile ottenere delle informazioni sulla dinamica e in particolare sulla stabilità del punto fisso, studiando la linearizzante Gevrey. In particolare assumendo che il germe olomorfo sia della forma $f(z) = e^{2\pi i\omega} z + \ldots$, con $\omega \in \mathcal{B}_s$, $s > 0$, dimostriamo l'esistenza di un disco sufficientemente piccolo, $\mathbb{D}_r$, tale che ogni $z_0 \in \mathbb{D}_r$, può essere iterato un numero k di volte senza lasciare un disco di raggio doppio, per $|k| = \mathcal{O}\left(exp\{(r/|z_0|)^{1/s}\}\right)$.

Non possiamo quindi decidere della stabilità dell'origine, ma possiamo dimostrare *effettiva stabilità*: cioè tutte le orbite con dato iniziale sufficientemente vicino al punto fisso, si comportano come se l'origine fosse stabile restando confinate per un tempo che può essere reso molto lungo. In ogni applicazione pratica (integrazione numerica oppure studio della stabilità di un sistema fisico) questo sistema potrebbe essere considerato a tutti gli effetti stabile.

Vogliamo far notare che nel limite $s \to 0$ il tempo di stabilità effettiva diverge, ottenendo così stabilità del punto fisso, contemporaneamente la condizione aritmetica Bruno–s "tende" alla condizione Bruno classica da cui segue la stabilità.

REFERENCES

[1] A.D.Brjuno: *Analitycal form of differential equation*, Trans. Moscow Math. Soc. **25**, (1971), pp. 131–288.

[2] T.Carletti: *Stability of orbits and arithmetics for some discrete dynamical systems*, Tesi Dottorato di Ricerca Università di Firenze, Febbraio 2000.

[3] T.Carletti: *Exponentially long time stability for non–linearizable analytic germs of* $(\mathbb{C}^n, 0)$, inviato per pubblicazione Ann. Inst. Fourier, (2002).

[4] T.Carletti: *The Lagrange inversion formula on non–Archimedean fields. Non–Analytical Form of Differential and Finite Difference Equations*, DCDS Series A, Vol.**9**, N.**4**, (2003), pp. 835–858.

[5] T.Carletti and S.Marmi: *Linearization of analytic and non–analytic germs of diffeomorphisms of* $(\mathbb{C}, \mathbf{0})$, Bull. Soc. math. France, **128**, (2000), pp. 69–85.

[6] G.H.Hardy and E.M.Wright: *An introduction to the theory of numbers*, 5^{th} edition Oxford Univ. Press.

[7] E.Schröder: *Über iterierte funktionen*, Ann.Math. **3**, (1871), pp. 296–322.

[8] J.-C.Yoccoz: *Théorème de Siegel, polynômes quadratiques et nombres de Brjuno*, Astérisque **231**,(1995), pp. 3–88.